Feuille de TD 4 - Propriétés de $\mathbb{R}$

Questions de cours. (a) Donner la définition de valeur absolue d'un nombre réel $x \in \mathbb{R}$.

(b) Énoncer l'inégalité triangulaire de la valeur absolue.

(c) Soient E un ensemble ordonné et $F \subseteq E$ un sous-ensemble de E. Donner la définition de la borne inférieure de F et de minimum de F.

(d) Donner des exemples de sous-ensembles de $\mathbb{R}$ tels que :

- (i) la borne supérieure n'existe pas ;
- (ii) le sous-ensemble n'admet pas de minorant ;
- (iii) le sous-ensemble n'admet pas de majorant ;
- (iv) le sous-ensemble admet une majorant, mais n'a pas de maximum ;
- (v) la borne inférieure existe, mais n'a pas de minimum.

(e) Énoncer la propriété de la borne supérieure pour les sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

(f) Énoncer la propriété archimédienne des nombres réels.

(g) Donner la définition de densité d'un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{R}$.

(h) Donner quatre exemples de sous-ensembles denses dans $\mathbb{R}$.

(i) Énoncer une propriété d'ordre qui soit vérifiée pour les nombres réels $\mathbb{R}$, mais qui ne soit pas vérifiée pour les nombres rationnels $\mathbb{Q}$.

Exercice 1. Soient α, β, γ et δ quatre nombres réels. Montrer que si $\alpha < \beta$ et $\gamma < \delta$ alors $\alpha\delta + \beta\gamma < \alpha\gamma + \beta\delta$.

Exercice 2. Soient α et β deux nombres réels. Simplifier l'inégalité $\alpha^2 < \alpha\beta < \beta^2$.

Exercice 3. Soit γ nombre réel.

(a) Montrer que si $0 < \gamma < 1$, alors $0 < \gamma^2 < \gamma < 1$.

(b) Montrer que si $1 < \gamma$, alors $1 < \gamma < \gamma^2$.

Exercice 4. Soit n dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Montrer que $n^2 \geq n$; en déduire que $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 5. Soient α et β dans $\mathbb{R}$. Montrer que $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ si, et seulement si, $\alpha\beta \geq 0$.

Exercice 6. Soient α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha \leq \gamma$. Montrer que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ si, et seulement si, $|\alpha - \beta| + |\beta - \gamma| = |\alpha - \gamma|$. Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 7. Hachurez la région du plan Oxy définie par l'équation ou par les inégalités suivantes :

(a) $\|x\| = \|y\|$,	(b) $\|x\| + \|y\| = 1$,	(c) $\|x\| - \|y\| = 2$,	(d) $\|xy\| = 2$,
(e) $\|x\| \leq \|y\|$,	(f) $\|x\| + \|y\| \leq 1$,	(g) $\|x\| - \|y\| \leq 2$,	(h) $\|xy\| \geq 2$.

Exercice 8. Soient α, β, x et y quatre nombres réels tels que $\alpha < x < \beta$ et $\alpha < y < \beta$. Montrer que $|x - y| < |\beta - \alpha|$. Interpréter graphiquement ce résultat.

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(a) $x < |x-1|$,
(b) $x < -|x-1|$,
(c) $x^2 < |x-1|$,
(d) $x^2 < -|x-1|$,
(e) $x^2 < |x-\frac{1}{4}|$,
(f) $|x-5| < |x-1|$,
(g) $1 < |x-2| \leq 3$,
(h) $|x+2|\,|x-2| > 4$,
(i) $|x-1| < |x|$,
(j) $|x| + |x+1| < 2$.

Exercice 10. Déterminer les intervalles que définissent les ensembles suivants :

(a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x + 1 \geq 0\}$,
(b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 + x < 2\}$,
(c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0 \text{ et } x^2 + x - 6 < 0\}$,
(d) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < x^2 - 12 < 4x\}$,
(e) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \,|\, \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}} \in \mathbb{R}\}$,
(f) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \,|\, \frac{x-2}{x+3} < 0\}$,
(g) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \,|\, \frac{2x+1}{x+2} < 1\}$,
(h) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, (2x+1)^6(x-1) \geq 0\}$.

Exercice 11. Dessiner le graphe de la fonction $x \mapsto |x+1| - |x| + |x-1|$.

Exercice 12. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3 - 2x$ et $g(x) = x^2$. Dessiner les graphes de u et v où

$$u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \max(f(x), g(x)) \qquad\qquad v\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \min(f(x), g(x)).$$

Exercice 13. Si $E := \{\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \,|\, n, m \in \mathbb{N}\}$ déterminer $\inf E$ et $\sup E$.

Exercice 14. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ contient un de ses majorants, montrer que ce majorant est la borne supérieure de E.

Exercice 15. Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non vide et majoré. Montrer que $u = \sup E$ si, et seulement si,

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u - \frac{1}{n}$ n'est pas un majorant de E, et
(b) $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u + \frac{1}{n}$ est un majorant de E.

Exercice 16. Soit y un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} < y$.

Exercice 17. Montrer que les nombres réels suivants sont irrationnels :

(a) $\sqrt{3}$,
(b) $\sqrt{6}$,
(c) $\sqrt{2} + 1$,
(d) $3\sqrt{2}$,
(e) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Exercice 18. Montrer que si $y \in \mathbb{R}$ est irrationnel et si r est un rationnel non nul, alors $r + y$ et ry sont irrationnels.

Exercice 19. Montrer qu'il existe un nombre réel positif u tel que $u^3 = 2$.

Exercice 20. Propriété des intervalles emboîtés.
Soit $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ une suite décroissante d'intervalles fermés bornés non vides, c'est-à-dire :

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots.$$

On veut montrer qu'il existe un nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que l'ensemble $\{\alpha_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ a une borne supérieure ; dans la suite on la notera x.
(b) Supposons $n \leq k$; montrer que $\alpha_k \leq \beta_n$.
(c) Supposons $n > k$; montrer que $\alpha_k \leq \beta_n$.

(d) En déduire que l'ensemble $\{\beta_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est minoré par x.

(e) Finalement montrer que $x \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 21. (a) Soient n un entier strictement positif et $I_n := [0, \frac{1}{n}]$. Montrer que si $x > 0$, alors $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} I_n$.

(b) Soient n un entier strictement positif et $J_n :=]0, \frac{1}{n}]$. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{\infty} J_n = \emptyset$.

Exercice 22. Pour tout réel x, on définit la partie entière inférieure (resp. supérieure) de x comme

$$\lfloor x \rfloor := \max \big\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x \big\}, \qquad \lceil x \rceil := \min \big\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \geq x \big\}.$$

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les quantités $\lfloor x \rfloor$ et $\lceil x \rceil$ sont bien définies et appartiennent à $\mathbb{Z}$.

(b) Montrer que $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$; puis montrer à l'aide d'exemples que les inégalités peuvent être strictes.

(c) Dessiner les graphes de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ et $x \mapsto \lceil x \rceil$.

Exercice 23. Développement binaire d'un nombre réel (Répétez la construction du développement décimal en base 2).
On appelle *chiffre* un élément de $C := \{0, 1\}$. Considérons une suite α_1, α_2, α_3, ... de chiffres et associons lui la suite de nombres rationnels

$$s_n := \tfrac{\alpha_1}{2} + \tfrac{\alpha_2}{2^2} + \ldots + \tfrac{\alpha_n}{2^n},$$

qu'on notera aussi $s_n := 0, \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$.
Rappelons la définition de la limite d'une suite convergente : x est limite de la suite convergente $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle vérifie la condition

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad ((n \geq N) \Rightarrow (|s_n - x| < \varepsilon)).$$

On dit que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si elle admet une limite x.

Si on utilise les trois résultats suivants (énoncés sans preuve), on peut résoudre l'exercice sans se servir de la définition explicite de la convergence :
– Une suite majorée et croissante est convergente.
– **Lemme des gendarmes**. Si (a_n), (b_n) et (c_n) sont trois suites telles que (a_n) et (c_n) convergent vers x et

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors (b_n) converge vers x aussi.
– La limite de $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.

(a) Montrer que la suite s_n est croissante et majorée. En déduire que s_n converge vers un réel $x \in [0, 1]$.

On introduit la notation : $x = 0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$ et on appelle cette écriture un développement binaire de x.

(b) Pour $x \in [0,1[$ fabriquons la suite

$$\alpha_1 := \lfloor 2x \rfloor,\ \alpha_2 := \lfloor 2^2 x - 2\alpha_1 \rfloor,\ \dots,\ \alpha_n := \lfloor 2^n x - 2^{n-1}\alpha_1 - \dots - 2\alpha_{n-1} \rfloor$$

et ensuite $s_n := \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n}$. Montrer par récurrence que $\alpha_n \leq 1$ (*i.e.* l'entier α_n est un chiffre) et $0 \leq x - s_n < \frac{1}{2^n}$.

(c) En déduire que tout nombre réel $x \in [0,1[$ admet un développement binaire

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots .$$

(d) Montrer que $0,111\dots 11\dots = 1$.

Le développement binaire $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots$ est unique si on impose la condition :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}, \exists\, n > N,\ \alpha_n \neq 1.$$

(e) Pour montrer l'affirmation précédente, raisonnons par absurde et supposons

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n \dots = 0,\beta_1\beta_2\beta_3 \dots \beta_n \dots \text{ et } \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{r-1} = \beta_{r-1} \text{ mais } \alpha_r < \beta_r.$$

Montrer alors que

$$0,0\dots 0\alpha_{r+1} \dots - 0,0\dots 0\beta_{r+1} \dots \geq 2^{-r},$$

mais

$$0,0\dots 0\alpha_{r+1} \dots < 2^{-r},$$

ce qui nous mène à une contradiction.

Exercice 24. Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions décimales périodiques $1.25137\dots 137\dots$ et $37.14653\dots 653\dots$.

Exercice 25. Trouvez le nombre rationnel représenté par les expressions binaires périodiques $110.0011\dots 0011\dots$ et $0.100011000\dots 11000\dots$.

Exercice 26. Montrer qu'un nombre réel avec une expression décimale périodique est rationnel.

Exercice 27. Montrer que les seuls nombres réels qui admettent « deux » développements sont exactement les nombres rationnels « décimaux » $x = \frac{m}{10^n}$.

Exercice 28. Combien de bits (chiffres binaires) sont nécessaires pour assurer une précision de quatre chiffres décimaux ?